数理解析研究所講究録
313巻 1977年 148-164

Stochastic stability of group automorphisms

名大 理　森本明彦

§　距離空間の位相同型写像に対する stochastic stability（定義 2）と位相安定性との関係をのべ，その結果を用いて，Takens の予想 I（§2）を証明する。次に群同型写像に対する stochastic stability について調べる。又，$GL(n+1, \mathbb{R})$ の元 f から導かれる球面写像 $\varphi : S^n \longrightarrow S^n$ 及び射影変換についてものべる。終りに $Diff^1(S^1)$ について言及する。

§1. Bowen 位相同型

(M, d) をコンパクト距離空間とする。M から M の上への位相同型写像全体のなす群を $H(M)$ であらわす。$\varphi \in H(M)$，$x \in M$ に対し，

$$Orb_\varphi(x) = \{ \varphi^i(x) \mid i \in \mathbb{Z} \},$$

$$O_\varphi(x) = Cl(Orb_\varphi(x)) \qquad (Cl : closure)$$

とおく。

定義1. M の点列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が φ の δ-pseudo-orbit（簡単に，δ-軌道）であるとは，

$$d(\varphi(x_i),\ x_{i+1}) \leq \delta \qquad (i\in\mathbb{Z})$$

が成立つときをいう。ただし $\delta>0$ は定数. φ の δ-軌道全体のなす集合を $\mathrm{Orb}^{\delta}(\varphi)$ であらわす。

点列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ に対し，点 $y\in M$ が φ によって，$\{x_i\}$ を ε-追跡する（ε-trace）とは

$$d(\varphi^i(y),\ x_i) \leq \varepsilon \qquad (i\in\mathbb{Z})$$

なる時をいう. ただし $\varepsilon>0$ は定数. $\{x_i\}$ を φ によって ε-追跡する点全体のなす集合を $\mathrm{Tr}^{\varepsilon}(\{x_i\},\varphi)$ であらわす.

定義2. $\varphi\in H(M)$ が stochastically stable であるとは，$\forall\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ が存在し，任意の $\{x_i\}\in\mathrm{Orb}^{\delta}(\varphi)$ に対し，$\mathrm{Tr}^{\varepsilon}(\{x_i\},\varphi)\neq\emptyset$ なる時をいう。δ-pseudo-orbit の概念を（多分，始めて明確に）定義した R. Bowen [1] の名前をとって，stochastically stable な φ を Bowen 同相（写像）とも呼ぶことにする。

定義3. M の空でない閉部分集合 A の全体からなる集合を $C(M)$ であらわすと，これは次の距離 $\bar{d}$ によって，コンパクト距離空間になる： $A,B\in C(M)$ に対し，

$$\bar{d}(A,B) = \mathrm{Max}\left\{ \mathrm{Max}_{a\in A}\, d(a,B),\ \mathrm{Max}_{b\in B}\, d(A,b) \right\},$$

$$d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b). \quad (\text{cf. } [2]).$$

$U_\varepsilon(A) = \{x \in M \mid d(x, A) < \varepsilon\}$ とおくと、

$\bar{d}(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid U_\varepsilon(A) \supset B,\ U_\varepsilon(B) \supset A\}$.

$O_\varphi(x) \in C(M)$ であるから、$O_\varphi = Cl\{O_\varphi(x) \mid x \in M\} \subset C(M)$ が考えられる。よって、$O_\varphi \in C(C(M))$ である。

定義 4. $\varphi \in H(M)$ に対し、

$$E_\varphi = \{A \in C(M) \mid \forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon \in C(M),\ \exists \{x_i\} \in Orb^\delta(\varphi),\ A_\varepsilon = Cl\{x_i \mid i \in \mathbb{Z}\},\ \bar{d}(A, A_\varepsilon) < \varepsilon\}$$

とおく。E_φ の元 A のことを φ の extended orbit とよぶ。容易に、$O_\varphi \subset E_\varphi \in C(C(M))$ なることがわかる。

§2. Zeeman の予想と Takens の予想.

M をコンパクト(リーマン)C^∞ 多様体とし、

$$Diff^1(M) = \{\varphi \mid \varphi : M \to M\ \ C^1\text{-微分同型}\}$$

に C^1-位相を入れておく。

定義 5. 写像 O (resp. E) : $Diff^1(M) \to C(C(M))$ を $O(\varphi) = O_\varphi$, $E(\varphi) = E_\varphi$, $\varphi \in Diff^1(M)$ で定義する。点 $\varphi \in Diff^1(M)$ において O (resp. E) が連続なる時 φ は tolerance stable (resp. extended tolerance stable) とよぶ。

Zeeman の予想:

"$\{\varphi \in Diff^1(M) \mid \varphi : \text{tolerance stable}\}$ は $Diff^1(M)$ の中の residual set であろう。"

即ち "orbits の凡その状態は generically には連続的に変化するだろう" という予想である。

F. Takens [4] はこの予想の証明を試みているが今までの所成功していない。ただ次のことは証明し，以下の予想をかかげている。

定理 A (Takens).

$\{\varphi \in \mathrm{Diff}^1(M) \mid \varphi:$ extended tolerance stable$\}$ は $\mathrm{Diff}^1(M)$ の中の residual set である。

従って，次のことが自然と問題になってくる：

問題 1. いかなる φ に対し $O_\varphi = E_\varphi$ が成立つか？

以下この等式をみたす φ を OE 同相とよぶことにする。

Takens の予想：

I. "$\varphi \in \mathrm{Diff}^1(M)$ が AS-微分同型，即ち公理 A と強横断性条件とをみたせば，φ は OE 同相であろう。"

II. "$\{\varphi \in \mathrm{Diff}^1(M) \mid O_\varphi = E_\varphi\}$ は $\mathrm{Diff}^1(M)$ の中の residual set であろう。"

これら予想 I, II に関して次の定理が成立つ。

定理 B [4] $\varphi \in \mathrm{Diff}^1(M)$ が Morse-Smale 微分同型ならば φ は OE 同相である。

定理 C [4] 予想 II が正しいならば，Zeeman の予想も正しい。

まづ，次の補題が成立つ：

補題 1. $\varphi \in H(M)$ が Bowen 同相ならば，OE 同相である。

本講では次の問題を考察したい。

問題 2. いかなる φ は Bowen 同相であるか？

§3. 位相安定性と Bowen 位相同型.

M はコンパクト距離空間とする. M から M の中への連続写像全体のなす集合を $\mathrm{Map}(M)$ であらわし，$\varphi, \psi \in \mathrm{Map}(M)$ に対し，$d(\varphi, \psi) = \sup_{x \in M} d(\varphi(x), \psi(x))$ とおく.

定義 6. $\varphi \in H(M)$ が位相安定であるとは，$\forall \varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在し $d(\varphi, \psi) < \delta$ なる任意の $\psi \in H(M)$ に対し，$h \in \mathrm{Map}(M)$ を適当にとると，

i) $h \circ \psi = \varphi \circ h$ ，ii) $d(h, 1_M) < \varepsilon$

をみたすときをいう。

定理 1. M を C^∞ 多様体とし，$\dim M \geq 3$ とする。$\varphi \in H(M)$ が位相安定ならば，φ は Bowen 同相である。

証明. 第1段. $\mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in M \mid \varphi(x) = x\}$ とおくと，$M - \mathrm{Fix}(\varphi)$ は M の中で dense である.

もし dense でないとするとある空でない開集合 $U \subset M$ が存在して，$\mathrm{Fix}(\varphi) \supset U$. 点 $x_0 \in U$ と x_0 の巾が 4ε の cubic 座標近傍 $V \subset U$ をとる. V 上の座標系を

$\{x_1,\cdots,x_n\}$ として，中心 x_0，巾 3ε の cubic 近傍を W とする．ε に対し定義6の $\delta>0$ をとる。W 上では x_1 軸の方向への平行移動，$M-U$ 上では点を動かさない M から M への位相同型 η であって，$d(\eta,1_M)<\delta$ なるものがとれる。$\psi=\eta\circ\varphi$ とおくと $d(\psi,\varphi)<\delta$ であるから，定義6より $h\in Map(M)$ が i), ii) をみたすようにとれる．$h\circ\psi^i=\varphi^i\circ h$ $(i=1,2,\cdots)$ であるから $h(x_0)\in U_\varepsilon(x_0)\subset U\subset Fix(\varphi)$ に注意すると，$h\circ\psi^i(x_0)=\varphi^i\circ h(x_0)=h(x_0)$．他方 i を十分大にとれば，$\psi^i(x_0)\notin W$．$d(h,1_M)<\varepsilon$ に着目すると矛盾が導かれる。

第2段．任意の $\delta>0$，$\delta_1>0$，整数 $k>0$，$\{x_i\}\in Orb^{\delta}(\varphi)$ に対し，$\{x_i'\}\in Orb^{2\delta}(\varphi)$ が存在し，(a) $d(x_i,x_i')<\delta_1$，(b) $\{\varphi(x_i'),x_{i+1}'\}\cap\{\varphi(x_j'),x_{j+1}'\}=\emptyset$ $(0\le i<j\le k)$.

まず $d(x_i,x_i')<\delta_1$ $(0\le i\le k)$ なる x_i' をとり $x_i'\neq x_j'$ $(0\le i<j\le k)$ にできる．条件(b)は $0\le i<j\le k-1$ に対して成立したとしよう。$\varphi(x_k')\in\bigcup_{i=0}^{k-1}\{\varphi(x_i'),x_{i+1}'\}$ なら $\varphi(x_k')=x_{i+1}'$ なる $i\le k-1$ がある．$i\neq k-1$ なら $x_k''\in M$ が存在して，$d(x_k,x_k'')<\delta_1$，$\varphi(x_k'')\neq\varphi(x_k')$．$i=k-1$ なら $\varphi(x_k')=x_k'$．よって第1段より x_k' の近くに x_k'' がとれて $\varphi(x_k'')\neq x_k''$．x_k'' を改めて x_k' とかくと (b) は $0\le i<j\le k$ に対し成立する．

第3段. $\forall\varepsilon>0$ に対し定義6の $\delta>0$ をとる。$\forall k>0$ を固定し, $\{x_i\}\in \mathrm{Orb}^{\frac{\delta}{2}}(\varphi)$ をとる. 第2段より $\{x_i'\}\in\mathrm{Orb}^{\delta}(\varphi)$ で $d(x_i,x_i')<\varepsilon$ 及 (b) をみたすものがとれる. $d(\varphi(x_i'),x_{i+1}')<\delta$ なることと, $\dim M\geq 3$ なることから, ある $\eta\in H(M)$ が存在し

$$\eta(\varphi(x_i'))=x_{i+1}' \quad (0\leq i\leq k),\quad d(\eta,1_M)<\delta.$$

$\eta\circ\varphi=\psi$ とおくと, $d(\varphi,\psi)<\delta$ であるから, $h\in\mathrm{Map}(M)$ が存在して, $h\circ\psi=\varphi\circ h$, $d(h,1_M)<\varepsilon$.

$h(x_0')=y$ とおくと, $0\leq i\leq k$ に対し $d(\varphi^i(y),x_i)$
$=d(\varphi^i h(x_0'),x_i)=d(h\psi^i(x_0'),x_i)=d(hx_i',x_i)$
$\leq d(hx_i',x_i')+d(x_i',x_i)<2\varepsilon.$

第4段. $\{x_i\}\in\mathrm{Orb}^{\frac{\delta}{2}}(\varphi)$ に対し $\mathrm{Tr}^{2\varepsilon}(\{x_i\},\varphi)\neq\emptyset$.

任意の整数 $k>0$ に対し, $y_i=x_{i-k}$ $(i\in\mathbb{Z})$ とおくと $\{y_i\}\in\mathrm{Orb}^{\frac{\delta}{2}}(\varphi)$. 第3段を $\{y_i\}$ と $2k+1$ に適用するとある $y'\in M$ があって $d(\varphi^i(y'),y_i)<2\varepsilon$ $(0\leq i\leq 2k+1)$ が成立つ. $y=\varphi^k(y')$ とおくと $d(\varphi^i(y),x_i)<2\varepsilon$ $(-k\leq i\leq k)$ がわかる. y は k に依存するから $y=y(k)$ とかく. $\{y(k)\mid k=1,2,\cdots\}$ の集積点の1つを y とすると $y\in\mathrm{Tr}^{2\varepsilon}(\{x_i\},\varphi)$ が証明される.

<u>定理2.</u> Takens の予想 I は正しい。

<u>証明.</u> $\varphi\in\mathrm{Diff}^1(M)$ を AS-微分同型とせよ。$\dim M\geq 1$

としてよい. $\varphi\times\varphi\times\varphi\in \mathrm{Diff}^1(M\times M\times M)$ を考えると, これも AS-微分同型である. Nitecki [3] の結果によれば, AS-同型は位相安定である. よって定理1. によって, $\varphi\times\varphi\times\varphi$ は Bowen 同相である. 所で $\varphi\in H(M)$, $\psi\in H(M')$ のとき $\varphi\times\psi\in H(M\times M')$ が Bowen 同相であるためには φ, ψ が共に Bowen 同相であることが必要十分であることが言える。よって, 我々の φ は Bowen 同相である。よって, 補題1より φ は OE 同相である.

§4. $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ の群同型

次の定理を目標とする:

定理3. $\varphi: T^n\to T^n$ を群同型写像とする。この時, 次の条件 1)～5) は同値である。

1) φ は Anosov 微分同型である。

2) φ は構造安定である.

3) φ は Bowen 同相である.

4) φ は位相安定である.

5) φ は AS 微分同型である.

まず, 次の命題を証明する. そのため, 定義2の Bowen 同相は M がコンパクトでなくても定義出来ていることに注意しておく.

命題1. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の線型自己同型とすると，f がBowen同相であるためには，f が hyperbolic であることが必要十分である．

証明　f はBowen同相とする。$f^{\mathbb{C}}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ を f の複素化とすると $f^{\mathbb{C}}=f\times f:\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ と同一視される．よって $f^{\mathbb{C}}$ もBowen同相．$f^{\mathbb{C}}$ のJordan標準型を考えると，その各因子もBowen同相である．したがって $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}$ をその1つの因子とするときこれがBowen同相ならば $|\lambda|\neq 1$ なることを言えばよいが，それは容易である．よって f は hyperbolic である．

逆に f が hyperbolic ならば，よく知られたように，$\mathbb{R}^n$ の部分空間 E^s, E^u，と定数 $C>0$，$0<\lambda<1$ が存在して，

i) $\mathbb{R}^n=E^s\oplus E^u$，$f(E^\sigma)=E^\sigma$　$(\sigma=s,u)$

ii) $\|f^n v\|\leq C\lambda^n\|v\|$　　$v\in E^s$，$n\geq 0$

$\|f^{-n}w\|\leq C\lambda^n\|w\|$　　$w\in E^u$，$n\geq 0$

が成立する．この分解を用いて f がBowen同相であることが直接証明されるのである．

定理3の証明の概略：

4) → 3) は定理1による．　3) → 1)：$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を φ の covering homomorphism とすると，f もBowen同相なることが証明できる．よって命題1より f は hyperbolic.

よって，φ は Anosov 同型になることを知る．1) → 5) は Anosov の closing lemma による．5) → 3) は定理1による．3) → 4)：f は hyperbolic であるから expansive．よって，φ も expansive なることがわかる．従って，次の命題より φ は位相安定である．

命題2．$\varphi \in H(M)$ が expansive かつ Bowen 同相ならば，φ は位相安定である．

§5. Isometries.

定理4．M を2点以上を含むコンパクト連結距離空間とする．M の isometry φ は決して Bowen 同相にはならない．

証明 第1段．$\Omega(\varphi)$ を φ の nonwandering set とすると $\Omega(\varphi) = M$ が成立つ．

第2段 $M \in E_\varphi$（定義4参照）．

$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\{x_i\} \in Orb^{\varepsilon}(\varphi)$ が存在し，$A_\varepsilon = Cl\{x_i | i \in \mathbb{Z}\}$ とおくと $U_\varepsilon(A_\varepsilon) \supset M$ なることが第1段を用いて証明される．即ち $\bar{d}(M, A_\varepsilon) < \varepsilon$．これより $M \in E_\varphi$．

第3段．φ が Bowen 同相であるとして矛盾を出す．$\varepsilon = \mathrm{diam}(M)/7$ とおくと $\varepsilon > 0$．よって $\exists \delta > 0$，$\varepsilon < \delta$，$\forall \{x_i\} \in Orb^{\delta}(\varphi)$ は ε-追跡される．$U = U_{\delta/2}(x_0)$ とおく．$x_0 \in \Omega(\varphi)$ より $\exists k > 0$，$\varphi^k(U) \cap U \neq \phi$．$p_0 \in U$, $\varphi^k(p_0)$

$\in U$ なる p_0 をとる. $x_{nk+i}=\varphi^i(p_0)$, $n\in\mathbb{Z}$, $0\le i<k$ とおくと $\{x_i\}\in Orb^{\delta}(\varphi)$. よって $\exists y\in Tr^{\varepsilon}(\{x_i\},\varphi)$. 特に $d(\varphi^{nk}(y),p_0)\le\varepsilon$ $(n\in\mathbb{Z})$. ここで $\psi=\varphi^k$, $y_n=\psi^n(y)$ とおくと, $y_n\in U_\varepsilon(p_0)$ $(n\in\mathbb{Z})$. ψ は isometry であるから $M\in E_\psi$. 更に φ が Bowen 同相なることより ψ も Bowen 同相となる. 補題1より $O_\psi=E_\psi$. よって $M\in O_\psi$. 従って, $\exists z\in M$, $(*)$ $\bar{d}(O_\psi(z),M)<\varepsilon$. $y\in M$ と$(*)$より $\exists m\in\mathbb{Z}$, $y\in U_\varepsilon(\psi^m(z))$. ψ は isometry だから, $\psi^m(z)\in U_\varepsilon(y)$ に ψ^n を作用させて, $\psi^n(\psi^m(z))\in U_\varepsilon(\psi^n(y))\subset U_{2\varepsilon}(p_0)$. $n\in\mathbb{Z}$ は任意であったから, $Orb_\psi(z)\subset U_{2\varepsilon}(p_0)$. 従って $(*)$ より $M\subset U_\varepsilon(O_\psi(z))\subset U_{3\varepsilon}(x_0)$. これから $\mathrm{diam}(M)\le 6\varepsilon$ が得られ, 矛盾である.

定理5. G を連結なコンパクト Lie 群とする. 群同型 $\varphi: G\to G$ であって, G のあるリーマン計量に関し Bowen 同相である φ が存在すれば, 実は $G\simeq T^n$ である.

証明. A (resp. S) を G の極大アーベル(半単純) 正規部分群とすると, $G=A\cdot S$ で, $Z=A\cap S$ は有限群である. 更に $\varphi(A)=A$, $\varphi(S)=S$ が成立つ. $\xi=\varphi|_A$, $\eta=\varphi|_S$ とおく. $\pi: A\times S\longrightarrow G$ を $\pi(a,s)=a\cdot s$ $(a\in A,\ s\in S)$ で定義すると, π は有限被覆写像であって, $\pi\circ(\xi\times\eta)=\varphi\circ\pi$ が成立つ. このことと, φ が Bowen同相なること

とより $\xi\times\eta$ が Bowen 同相であることが結論できる. 従って, η は Bowen 同相である. S の Lie 環の killing 型式を β とすると $-\beta$ は正定値双1次形式であって, η は $-\beta$ を不変にする. よって, η は $-\beta$ から導かれる S 上のリーマン計量に関して isometry である. 定理4 より $\dim S=0$, 即ち $S=\{e\}$ となり $G=A\simeq T^n$ が結論される.

§6. 線型球面写像 $\varphi: S^n\longrightarrow S^n$.

定義7. $f\in GL(n+1,\mathbb{R})$ に対し $\varphi: S^n\longrightarrow S^n$ を $\varphi(x)=f(x)/\|f(x)\|$ $(x\in S^n)$ で定義する. $\varphi=S(f)$ と書けば $S(f\circ g)=S(f)\circ S(g)$, $f, g\in GL(n+1,\mathbb{R})$ がたしかめられる. よって φ は S^n の C^∞ 微分同型である. φ を f から導かれた線型球面写像と呼ぶことにする.

次の定理は定理3と比較すると興味がある.

定理6. $\varphi=S(f): S^n\longrightarrow S^n$ を f から導かれた線型球面写像とする. 次の条件 1)〜5) は同値である.

1) φ は Morse-Smale 微分同型である.

2) φ は構造安定である.

3) φ は Bowen 同相である.

4) φ は位相安定である.

5) φ は AS 微分同型である.

まず次の命題を証明する（命題1参照）.

<u>命題3.</u> $f \in GL(n+1, \mathbb{R})$ の固有値を $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}\}$ とする. $\varphi = S(f)$ が Bowen 同相であるための必要十分条件は $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ $(i \neq j)$ なることである. またこの条件がみたされていれば φ は Morse-Smale 同型である.

命題3の証明は次の補題を順次証明し, f の実 Jordan 標準型を考察することによって達成される.

<u>補題2.</u> $f = f_1 \times f_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $f_1 \in GL(m, \mathbb{R})$, $f_2 \in GL(n, \mathbb{R})$ とする. $S(f)$ が Bowen 同相ならば, $S(f_1)$, $S(f_2)$ も Bowen 同相である.（逆は成立しない（定理2の証明参照））.

<u>補題3.</u> $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(|\lambda| \neq 1)$ ならば $S(f) : S^1 \longrightarrow S^1$ は両極微分同型である.

<u>補題4.</u> $f = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ に対し, $S(f)$ は Bowen 同相ではない.

<u>補題5.</u> (i) $f = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ に対し $S(f)$ は Bowen 同相ではない

(ii) $f = \begin{pmatrix} R_\theta & I & & \\ & R_\theta & I & \\ & & \ddots & I \\ & & & R_\theta \end{pmatrix}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

に対し $S(f)$ は Bowen 同相ではない.

定理6の証明は　3) ⟶ 1) ⟶ 5) ⟶ 4) ⟶ 3)，
2) ⟶ 3) ⟶ 5) ⟶ 2)　の順に行われる．

定理7．実（又は複素）射影変換 $\varphi : P^n(\mathbb{R}) \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$ （$P^n(\mathbb{C}) \rightarrow P^n(\mathbb{C})$）に対しても定理6と同様の equivalence が成立する．

証明の概略．実の場合は被覆写像 $\pi : S^n \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$ に着目し，定理6に帰着させる．

複素の場合は補題2〜5に類似の命題を順次証明することによって達成される．

§7. $\mathrm{Diff}^1(S^1)$ について．

定義8．$\varphi \in H(S^1)$ を考える．$\mathrm{Fix}(\varphi) \neq \phi$ を仮定する．点 $p \in S^1 - \mathrm{Fix}(\varphi)$ のまわりで $\varphi(p)$ が p から右まわりであるか左まわりであるかに応じて，$\rho(p) = +1$ または $\rho(p) = -1$ とおくことにより，写像 $\rho : S^1 - \mathrm{Fix}(\varphi) \longrightarrow \{\pm 1\}$ が定義される．

命題4．$\mathrm{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$ なる $\varphi \in H(S^1)$ を考える．
φ が Bowen 同相であるためには次の条件 i), ii) が必要十分である．

i) $S^1 - \mathrm{Fix}(\varphi)$ は S^1 で dense，

ii) $\forall x \in \mathrm{Fix}(\varphi)$ に対し，ある点列 $x_i, x_i' \notin \mathrm{Fix}(\varphi)$

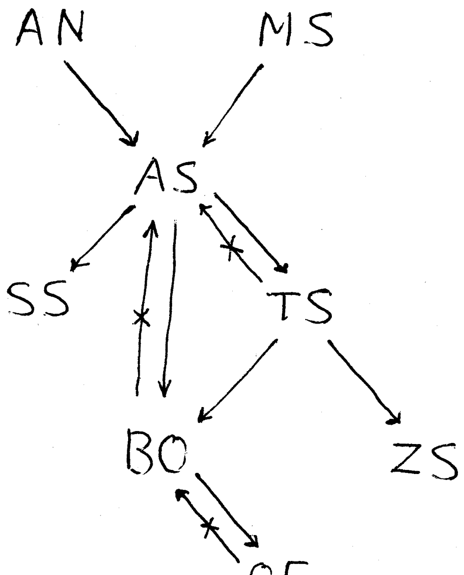
が存在して，$x_i \longrightarrow x$，$x_i' \longrightarrow x$ $(i \to \infty)$，$\rho(x_i) = +1$，$\rho(x_i') = -1$ $(i = 1, 2, \cdots)$ が成立つ.

<u>定理8</u>. 定理1は任意次元コンパクト多様体 M に対して成立つ.

<u>定理9</u>. $\varphi \in \mathrm{Diff}^2(S^1)$ に対し，φ が Bowen 同相であるためには，ある整数 $k > 0$ が存在して，φ^k が位相安定であることが必要十分である.

§8. 安定性の相互関係.

微分同相に対する種々の安定性の間の相互関係を図示すると次のような状況になっている.



ここで次のように記号を用いた：

AN : Anosov 同相，　MS : Morse-Smale 同相

AS : A-S 同相 (§2) , SS : 構造安定同相,

TS : 位相安定同相 , BO : Bowen 同相 (§1),

ZS : tolerance stable 同相 (§2), OE : OE-同相 (§2).

例へば BO ⟶ OE は "BO-同相ならば OE 同相である" ことを意味し, ⟶✕⟶ は必ずしも ⟶ でないことを示す。

§9. 問題.

本講に関連のあるいくつかの未解決の問題をかかげる。以下 φ はことわりなければコンパクト多様体の微分同相とする.

(1) BO 同相は $Diff^1(M)$ の中で generic であるか? (注: この問が肯定的ならば Zeeman の予想は正しい).

(2) $\varphi \in Diff^1(S^2)$ で, φ : BO-同相なるものを特性づけよ。

(3) φ : OE 同相なら, 整数 $k>0$ に対し, φ^k も OE 同相となるか? (注: 逆は正しいことが証明される).

(4) φ : 位相安定なら, φ^k もそうか?

φ^k : 位相安定なら, φ もそうか?

(5) φ, ψ : 位相安定なら $\varphi \times \psi$ もそうか? (及その逆).

(6) M : open リーマン多様体の時, M の isometry で

あって，BO同相なるもの存在するか？

(7) φ : BO 同相ならば，$\mathrm{Fix}(\varphi)$ は totally disconnected か？

(8) φ : BO 同相であって，位相安定でないものがあるか？

(9) $\varphi : M \to M$ を BO 同相，$\Lambda \subset M$ を φ-invariant 閉部分多様体とする時，$\varphi|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ も BO 同相か？

(10) ZS と OE との関係はどうなっているか？

文献

[1] R. Bowen, ω-limit sets for Axiom A diffeomorphisms, J. Diff. Eq. 18 (1975), 333-339.

[2] C. Kuratowski, Topologie II, Warsaw 1961.

[3] Z. Nitecki, On semi-stability for diffeomorphisms, Inv. Math. 14 (1971), 83-122.

[4] F. Takens, Tolerance stability, Dyn. Sys.-Warwick, Springer Lect. Notes, No. 468, 1975